MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Sorin Doru Noaghi · Dorin Lință
Maranda Lință · Lucian Nicolae Pițu

Matematică

Manual pentru clasa a VII-a

CUPRINS

1.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv

L1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Ne amintim

Mulțimi de numere

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$, mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$, mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$, mulțimea numerelor raționale.

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$$

Exemple

$7\in\mathbb{N},\ 7\in\mathbb{Z},\ 7\in\mathbb{Q}$

$-7\notin\mathbb{N},\ -7\in\mathbb{Z},\ -7\in\mathbb{Q}$

$\frac{1}{7}\notin\mathbb{N},\ \frac{1}{7}\notin\mathbb{Z},\ \frac{1}{7}\in\mathbb{Q}$

Reguli de calcul cu puteri

Dacă $a, b\in\mathbb{Q}^*$, iar $n, p\in\mathbb{Z}$, atunci:

$$a^n\cdot a^p=a^{n+p}$$

$$\left(a^n\right)^p=a^{n\cdot p}$$

$$a^n : a^p=a^{n-p}$$

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$$

$$a^n : b^n=(a:b)^n$$

$3^1\cdot 3^4=3^{1+4}=3^5$

$\left((-1)^3\right)^2=(-1)^{3\cdot 2}=(-1)^6=1$

$5^4:5^3=5^{4-3}=5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{27}{8}$

$(0,6)^2:2^2=(0,6:2)^2=0,3^2=0,09$

Pătrate perfecte

Numărul $x\in\mathbb{N}$ se numește **pătrat perfect** dacă există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $x=n^2$.

49 este pătrat perfect deoarece $49=7^2$

256 este pătrat perfect deoarece $256=16^2$

Rezolvăm și observăm

a) Dorim să aflăm numerele naturale care, ridicate la puterea a doua, dau unul din rezultatele: 16, 49, 225. Prin încercări, deducem că: $4^2=16$, $7^2=49$, $15^2=225$.

b) Ne propunem să aflăm latura pătratului a cărui arie este 144 cm^2.

$\mathcal{A}_{\square}=l^2$ și $\mathcal{A}_{\square}=144\ \text{cm}^2$. Obținem $l^2=12^2$, deci $l=12$ cm.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție: Fie $x\in\mathbb{N}$, pătrat perfect.
Se numește **rădăcina pătrată** a numărului x numărul natural n cu proprietatea $x=n^2$.

Vom scrie $\sqrt{x}=n$ și vom citi ***„radical din x este egal cu n"***.

Numărul natural n se mai numește și **„radicalul de ordin 2 al numărului x"**.

Exemple

$\sqrt{25}=5$ deoarece $5\in\mathbb{N}$ și $25=5^2$

$\sqrt{81}=9$ deoarece $9\in\mathbb{N}$ și $81=9^2$.

$\sqrt{0}=0$ deoarece $0\in\mathbb{N}$ și $0=0^2$.

$\sqrt{529}=23$ deoarece $23\in\mathbb{N}$ și $529=23^2$.

Operația prin care unui pătrat perfect $x \in \mathbb{N}$ i se asociază un număr $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $x = n^2$ se numește **operația de extragere a rădăcinii pătrate** sau **operația de extragere a radicalului.**

pătrat perfect

$25 = 5^2$

$\Downarrow$

$\sqrt{25} = 5$

rădăcina pătrată

Pătrate perfecte	Rădăcina pătrată
$225 = 15^2$	$\sqrt{225} = 15$
$256 = 16^2$	$\sqrt{256} = 16$
$289 = 17^2$	$\sqrt{289} = 17$
$324 = 18^2$	$\sqrt{324} = 18$
$361 = 19^2$	$\sqrt{361} = 19$
$400 = 20^2$	$\sqrt{400} = 20$
$441 = 21^2$	$\sqrt{441} = 21$

pătrat perfect

$5 \rightleftarrows 25$

rădăcina pătrată

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

$\sqrt{17^2} = 17$; $\sqrt{2019^2} = 2019$; $\sqrt{5^6} = \sqrt{\left(5^3\right)^2} = 5^3 = 125$;

$\sqrt{(38 \cdot 7 + 98 : 14)^2} = 38 \cdot 7 + 98 : 14$;

$\sqrt{2^{2018}} = \sqrt{\left(2^{1009}\right)^2} = 2^{1009}$; $\sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{\left(2^2 \cdot 3\right)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

Concluzie:

$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$, unde $n \in \mathbb{N}$

Prin urmare, $\sqrt{n^2} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

De regulă, înainte de a efectua adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri sau ridicări la putere ale unor expresii care conțin radicali, se vor efectua operațiile de extragere a rădăcinilor pătrate.

$\sqrt{36} + \sqrt{100} : \sqrt{25} = 6 + 10 : 5 = 8$

$\sqrt{64} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{25}^{\sqrt{4}} = 8 \cdot 3 + 5^2 = 49$

Totuși, în anumite situații, operațiile de extragere a radicalilor se pot realiza după efectuarea anumitor operații algebrice.

a) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$ și $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$, deci $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{25 \cdot 4}$

b) $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$ și $\sqrt{\dfrac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$, deci $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\dfrac{225}{25}}$

c) $\sqrt{1600} = \sqrt{16 \cdot 100} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$

$\sqrt{\dfrac{1600}{49}} = \dfrac{\sqrt{1600}}{\sqrt{49}} = \dfrac{40}{7}$

Au loc relațiile:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$, pătrate perfecte.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$ și oricare ar fi $y \in \mathbb{N}^*$, pătrate perfecte.

c) $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, $x, y \in \mathbb{N}$ pătrate perfecte, respectiv $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}^*$, pătrate perfecte.

Să nu ne pripim!

Ne putem întreba dacă au loc relații similare și în cazul adunării sau al scăderii.
Comparăm rezultatele calculelor:

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ și $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$

$\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ și $\sqrt{169}-\sqrt{25}=13-5=8$

$\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$

$\sqrt{169-25}\neq\sqrt{169}-\sqrt{25}$

Concluzie: $\sqrt{x+y}$ și $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **sunt diferite** pentru orice numere raționale pozitive.
$\sqrt{x-y}$ și $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ **sunt diferite** pentru orice numere raționale pozitive, $x>y$.

Reținem!

Dacă x este pătrat perfect, atunci numărul natural n cu proprietatea $x=n^2$ se numește **rădăcina pătrată** a numărului x sau **radicalul de ordin 2** al numărului x.
Se notează $\sqrt{x}=n$.

$\sqrt{x}=n \Leftrightarrow x=n^2$, unde $x\in\mathbb{N}$ este pătrat perfect și $n\in\mathbb{N}$.

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$; $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y\neq 0$, unde $x, y\in\mathbb{N}$ sunt pătrate perfecte.

$\sqrt{n^2}=n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 a) Scrieți toate pătratele perfecte mai mari decât 700 și mai mici decât 1000.
b) Scrieți toate pătratele perfecte cuprinse între 123 și 321.

2 Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate ale unor numere naturale.
Justificați răspunsul dat.
a) 64, 100, 140, 333, 1000000
b) 2^4, $4^2\cdot 9$, 3^6, 21^8, 10^9, $5^{2\cdot n}$, $6^{4\cdot n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

3 Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că x desemnează un număr *natural*.

a)

x	4	1	0	2	7	11
x^2						

b)

x^2	9	36	400	0	121	49
x						
$\sqrt{x^2}$						

4 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
$p_1: \sqrt{4}=2$;
$p_2: \sqrt{121}=11$;
$p_3: \sqrt{a^2}=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{N}$;
$p_4: \sqrt{11^2}=-11$;
$p_5: \sqrt{c^2}=c$, oricare ar fi $c\in\mathbb{Z}$;
$p_6: \sqrt{100\cdot b^4}=10\cdot b^2$, oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}$.

5 Determinați numărul natural n, pentru fiecare din situațiile:
a) $n^2=81$; b) $n^2=169$; c) $n^2=900$; d) $n^2=441$.

6 Demonstrați că numărul x este pătrat perfect și calculați $\sqrt{x}$:
a) $x=19\cdot 9+19\cdot 10$;
b) $x=2^{11}-2^{10}$;
c) $x=200+199\cdot 200$;
d) $x=n+n\cdot(n-1)$, $n\in\mathbb{N}^*$;
e) $x=\sqrt{441}+\sqrt{\dfrac{42\cdot 43+43\cdot 44}{2}}$;
f) $x=\dfrac{3^{n+2}-3^{n+1}-2\cdot 3^n}{3^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

7 Calculați:

a) $x = 9^2 + 12^2$, apoi $\sqrt{x}$;

b) $y = 25^2 - 7^2$, apoi $\sqrt{y}$;

c) $z = 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 17 + 17^2$, apoi $\sqrt{z}$.

8 a) Completați numere naturale în spațiile libere. pentru a obține egalități:
$2^2 \cdot 3^4 = (\ldots)^2$; $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = (\ldots)^2$
$2^{100} : 2^{84} = (\ldots)^2$; $2^6 \cdot 5^2 = (\ldots)^2$

b) Calculați $\sqrt{14^2}$; $\sqrt{7^4}$; $\sqrt{a^2}$, $a \in \mathbb{N}$;

c) Folosind rezultatele de la subpunctul a), calculați: $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$; $\sqrt{2^{100} : 2^{84}}$; $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$.

9 Se consideră mulțimea $A = \{576, 484, 2025, 1600, 2500, 3600, 1521, 729, 529, 2116\}$

a) Descompuneți în factori primi elementele mulțimii A și apoi scrieți-le ca pătrate ale unor produse.

b) Folosind rezultatele obținute la subpunctul a), calculați rădăcina pătrată a fiecărui element al mulțimii A.

10 Scrieți numerele de sub fiecare radical ca pătrat al unui număr natural, apoi efectuați calculele:

a) $\sqrt{1156} + \sqrt{3249} - \sqrt{1296}$

b) $\sqrt{1936} + \frac{1}{2}\sqrt{3844}$

c) $1{,}5 \cdot \sqrt{4900} - \sqrt{46656}$

11 a) Se consideră numărul
$A = 1 + 2 + \ldots + 10 + 10 \cdot (2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$.
Demonstrați că A este pătrat perfect și calculați $\sqrt{A}$.

b) Se consideră numărul
$B = 1 + 3 + 5 + \ldots + 19$.
Demonstrați că B este pătrat perfect și calculați $\sqrt{B}$.

c) Se consideră numărul
$C = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Demonstrați că C este pătrat perfect și calculați $\sqrt{C}$.

12 Probați, prin exemple, afirmațiile:

a) Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

b) Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$, atunci $\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$.

L2 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional

Ne amintim

În lecția anterioară, am stabilit că:

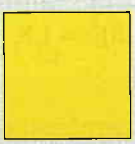
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $\quad$ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$ $\quad$ $\sqrt{n^2} = n$ $\quad$ $\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$ unde x și y sunt pătrate perfecte, iar $n \in \mathbb{N}$.

În cazul $x = 0$, am constatat că $\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

Ne propunem să aflăm dacă există $\sqrt{x}$, atunci când x este număr rațional pozitiv. Ne vom ocupa, mai întâi, de acele numere raționale care sunt *pătrate ale unor numere raționale pozitive.*

Rezolvăm și observăm

Aria unui pătrat este $1{,}69$ cm². Determinați lungimea laturii acestuia.



Soluția I: $\mathcal{A}_{\square} = l^2, \mathcal{A}_{\square} = 1{,}69$ cm². Obținem $l^2 = 1{,}3^2$, deci $l = 1{,}3$ cm.

Soluția a II-a: În contextul lecției noastre, rezolvarea se poate scrie astfel: $\mathcal{A}_{\square} = l^2, \mathcal{A}_{\square} = 1{,}69$ cm².

Obținem $l^2 = 1{,}69$, deci $l = \sqrt{1{,}69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = 1{,}3 \Rightarrow l = 1{,}3$ cm,

sau altfel: $l^2 = 1{,}69$, deci $l = \sqrt{1{,}69} = \sqrt{1{,}3^2} = 1{,}3 \Rightarrow l = 1{,}3$ cm.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Definiție

Se numește **rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv** x, numărul rațional pozitiv a, cu proprietatea $x = a^2$.

Vom scrie $\sqrt{x} = a$.

A. Să determinăm, în două moduri, rădăcinile pătrate: $a = \sqrt{1,44}$ și $b = \sqrt{0,0025}$

1) $a = \sqrt{1,44} = \sqrt{\dfrac{144}{100}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \dfrac{12}{10} = 1,2$

$b = \sqrt{0,0025} = \sqrt{\dfrac{25}{10000}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{10000}} = \dfrac{5}{100} = 0,05$

2) $a = \sqrt{1,44} = \sqrt{(1,2)^2} = 1,2$

$b = \sqrt{0,0025} = \sqrt{(0,05)^2} = 0,05$

Observație: Este important să alegem varianta avantajoasă.

B. Să observăm că putem determina rădăcina pătrată în mod asemănător și dacă numărul dat se exprimă sub formă de fracție periodică.

$$\sqrt{1,(7)} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \text{ și } \sqrt{3,36(1)} = \sqrt{\frac{3361-336}{900}} = \sqrt{\frac{3025}{900}} = \sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{11}{6}$$

Ne amintim

Modulul unui număr $x \in \mathbb{Q}$ este:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \geq 0 \\ -x, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

Exemple

$x = 3,5 > 0 \Rightarrow |x| = x = 3,5$

$x = -4 < 0 \Rightarrow |x| = -x = -(-4) = 4$

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Știm că $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Ne propunem să înțelegem ce reprezintă $\sqrt{x^2}$ pentru $x \in \mathbb{Q}$.

Vom analiza câteva exemple:

Pentru $x = 1,5$ avem $\sqrt{x^2} = \sqrt{1,5^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 = x$.

Pentru $x = -1,5$ avem $-x = -(-1,5) = 1,5$, iar

$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1,5)^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 = -x$

Deducem că:

$\sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \geq 0$;

$\sqrt{x^2} = -x$, pentru orice $x < 0$;

care pot fi scrise sub forma generală astfel:

$\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

a) Vom calcula $\sqrt{x^2}$ pentru $x = 8,9 - 5 : 4$.
Efectuăm întâi calculele: $x = 8,9 - 1,25 = 7,65$.
Deoarece $x > 0$, vom aplica formula $\sqrt{x^2} = x$
și obținem $\sqrt{x^2} = \sqrt{(7,65)^2} = 7,65$.

b) Vom calcula $\sqrt{x^2}$ pentru $x = 2,7 - 9 : 2$
Efectuăm întâi calculele: $x = 2,7 - 4,5 = -1,8$
Deoarece $x < 0$, vom aplica formula $\sqrt{x^2} = -x$
și obținem $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1,8)^2} = 1,8$.

Dacă despre numărul rațional x nu putem decide dacă este pozitiv sau negativ, vom folosi formula generală $\sqrt{x^2} = |x|$, oricare ar fi x, număr rațional.

c) Pentru $x = 2 - 1{,}2 : 0{,}4$ avem $\sqrt{x^2} = |x|$ și $|x| = |2 - 1{,}2 : 4|$. Doar ulterior, vom face operațiile necesare pentru obținerea răspunsului final, astfel:

$$\sqrt{x^2} = |x| = |2 - 1{,}2 : 0{,}4| = |2 - 3| = |-1| = 1$$

Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

a) $\sqrt{1{,}44} \cdot \sqrt{9} = 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6$ și $\sqrt{1{,}44 \cdot 9} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$

b) $\dfrac{\sqrt{1{,}44}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1{,}2}{3} = 0{,}4$ și $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{9}} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Au loc relațiile:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$, oricare ar fi x, y pătrate ale unor numere raționale.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, oricare ar fi x și y, pătrate ale unor numere raționale, $y \neq 0$.

Reținem!

Dacă x este pătratul unui număr rațional, atunci numărul rațional pozitiv a cu proprietatea $x = a^2$ se numește rădăcina pătrată a numărului x sau radicalul numărului x. Vom scrie $\sqrt{x} = a$.
Oricare ar fi numerele x și y, pătrate ale unor numere raționale, avem:

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ și $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y \neq 0$. $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

$p_1 : \sqrt{100} = 10$ $p_2 : \sqrt{400} = -20$

$p_3 : \sqrt{\dfrac{1}{36}} = \dfrac{1}{6}$ $p_4 : \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$

$p_5 : \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{7}{2}$ $p_6 : \sqrt{20{,}25} = \dfrac{9}{2}$

$p_7 : \sqrt{0{,}09} = -0{,}3$ $p_8 : \sqrt{0{,}0676} = \dfrac{13}{50}$

a) Dintre propozițiile enumerate, sunt adevărate următoarele: … .

b) Dintre propozițiile enumerate, sunt false următoarele: … .

2 Se consideră mulțimea $M = \left\{1{,}44; \dfrac{36}{25}; \dfrac{4}{16}; 3\dfrac{1}{16}; 1{,}(7)\right\}$. Determinați elementele mulțimii $P = \{x \mid x = \sqrt{y},\ y \in M\}$.

3 Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere, din fiecare tabel, știind că a desemnează un număr rațional pozitiv.

a)

a	$\frac{2}{3}$	1	0	0,25	1,(3)	$\frac{5}{4}$	$2\frac{1}{3}$
a^2							

b)

a^2	$\frac{1}{9}$	2,25	$\frac{100}{49}$	0	$2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$(0{,}4)^6$
a							
$\sqrt{a^2}$							

4 Calculați suma numerelor m și n, știind că:

a) $m = 1 + \sqrt{0{,}09}$ și $n = 2 - \sqrt{\dfrac{49}{25}}$;

b) $m = \dfrac{2}{5} + \sqrt{\dfrac{25}{4}}$ și $n = 0{,}6 - \sqrt{6{,}25}$.

5 Calculați:

a) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{81}{25}}$; $\sqrt{\frac{169}{4}}$; $\sqrt{\frac{625}{289}}$; $\sqrt{\frac{3}{300}}$

b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; $\sqrt{4\frac{29}{49}}$; $\sqrt{5\frac{29}{100}}$

c) $\sqrt{0{,}81}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{1{,}96}$; $\sqrt{4{,}41}$; $\sqrt{20{,}25}$

d) $\sqrt{\frac{2^4}{3^6}}$; $\sqrt{\frac{3^4 \cdot 5^6}{7^2}}$; $\sqrt{\frac{12}{3^3 \cdot 4^3}}$; $\sqrt{\frac{3^2+4^2}{7^2+24^2}}$

6 Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că x desemnează un număr întreg.

a)

x	-2	-17	12	-2	17	-12
x^2						

b)

x^2	16	1	49	0	121	36
x						
$\sqrt{x^2}$						

7 Determinați valorile numărului întreg n, pentru fiecare din situațiile:

a) $n^2 = 81$;

b) $n^2 = 169$ și $n > 0$;

c) $n^2 = 900$ și $n < 0$.

8 Se consideră mulțimea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Determinați elementele mulțimilor:

$B = \{n \mid n = x^2, x \in A\}$

$C = \{m \mid m = \sqrt{n}, n \in B\}$

9 Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că x desemnează un număr rațional. Comparați rezultatele obținute la subpunctul b) cu cele obținute la exercițiul 3.

a)

a	1	-1	0	$-0{,}5$	$0{,}5$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$
a^2							

b)

a^2	$\frac{1}{9}$	$2{,}25$	$\frac{100}{49}$	0	$2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$(0{,}4)^6$
a							
$\sqrt{a^2}$							

L3 Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv

Ne amintim

Teorema lui Pitagora: În orice triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

Pentru $a, b \in \mathbb{Q}_+$ avem $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

• **Estimarea** este o evaluare a unei cantități, având *date incomplete sau insuficiente.*
Spre deosebire de aproximare, la care cunoaștem mărimea maximă a erorii, în cazul estimării nu știm cât de aproape suntem de valoarea exactă.

• Dacă pentru efectuarea unui calcul folosim aproximări ale numerelor care intervin, atunci vom obține *o estimare* a rezultatului corect.

În triunghiul ABC, cu $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, are loc relația: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Exemple

a) Numărul de copaci din pădurea Băneasa este estimat la câteva sute de mii.

b) Estimăm că numărul de locuitori din capitala țării este de peste două milioane.

c) Estimăm că mai avem de parcurs 5 km până la destinație.

d) Folosind aproximări, prin lipsă, la zeci, în calculul $16{,}2 + 32 + 125{,}7$, obținem 160.
Rezultatul corect este 173,9.

Rezolvăm și observăm

Problemă:
Sonia și Natalie au fost la cumpărături, împreună cu sora lor, Cezara.
Ele au cumpărat trei truse de geometrie cu prețul de 32,9 lei trusa, cinci cutii de markere cu prețul de 19,29 lei cutia și 10 caiete cu spirală, cu prețul de 10,5 lei bucata.

Sonia spune: Ne trebuie *mai puțin* de 309 lei;
Natalie spune: Ne trebuie *mai mult* de 291 de lei.
Cezara spune: Eu cred că ne trebuie *cam* 304 lei.
Casiera scanează prețurile produselor, listează bonul de casă și spune: Aveți *de plătit suma* de 300,15 lei.
Cum se explică faptul că sumele nu coincid? A greșit cineva?

Pentru a înțelege logica răspunsului dat de cele trei surori, vom parcurge următoarele etape:
Calculăm *suma de plată* astfel: $S = 3 \cdot 32{,}9 + 5 \cdot 19{,}29 + 10 \cdot 10{,}5 = 300{,}15$ (lei)

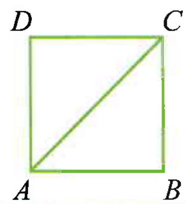
Estimăm suma, aproximând prețurile prin adaos, la unități:
$32{,}9 \approx 33$; $19{,}29 \approx 20$; $10{,}5 \approx 11$.
$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 11 = 309$

Estimăm suma, aproximând prețurile prin lipsă, la unități:
$32{,}9 \approx 32$; $19{,}29 \approx 19$; $10{,}5 \approx 10$.
$S \approx 3 \cdot 32 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 10 = 291$

Estimăm suma, rotunjind prețurile la unități:
$32{,}9 \approx 33$; $19{,}29 \approx 19$; $10{,}5 \approx 11$.
$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 11 = 304$

Observație: Fiecare dintre cele trei surori a estimat corect suma care urma să fie plătită, dar în mod diferit. ***Estimarea cea mai apropiată*** de rezultatul corect este cea obținută prin *rotunjirea termenilor*. Uneori însă, este util să folosim aproximări prin lipsă sau prin adaos pentru toți termenii.
Estimările sunt foarte utile în activitățile cotidiene. Acestea ne ajută să luăm *decizii practice avantajoase.*

Aplicație practică



1) Desenați pe caiete, folosind rigla gradată, pătratul $ABCD$, cu latura de lungime 1 dm.
2) Reprezentați diagonala AC a acestuia.
3) Scrieți relația dată de teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC.
4) **Măsurați cu atenție, folosind rigla gradată, lungimea segmentului AC. Notați valoarea găsită, în decimetri și comparați-o cu cea a colegilor din imediata vecinătate.**

- AC este ipotenuza triunghiului ABC, $AB = BC = 1$ dm, deci: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, adică $AC^2 = 1 + 1 = 2$.
- Măsurând cu atenție, se obțin, pentru lungimea segmentului AC, valori apropiate de 1,4 dm.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Egalitatea $AC^2 = 2$ ne arată că există un număr (nu-l cunoaștem încă), al cărui pătrat este 2. Cum AC este lungimea unui segment, rezultă $AC > 0$. Vom spune că $AC = \sqrt{2}$.
Din măsurători, rezultă că valoarea numărului $\sqrt{2}$ poate fi estimată, destul de greu, la 1,4.
Ne întrebăm: câte zecimale mai are? Pot fi determinate toate?
Răspunsul este oferit, parțial, de următoarea secvență:

Dacă $\sqrt{2} = q$, atunci $q^2 = 2$.
Prin încercări, vom urmări *să găsim* numărul q.

$1^2 = 1$	$< 2 < 4$	$= 2^2$
$1{,}4^2 = 1{,}96$	$< 2 < 2{,}25$	$= 1{,}5^2$
$1{,}41^2 = 1{,}9881$	$< 2 < 2{,}0164$	$= 1{,}42^2$
$1{,}414^2 = 1{,}999396$	$< 2 < 2{,}002225$	$= 1{,}415^2$

Constatăm că, prin încercările făcute, nu am găsit date suficiente pentru a afla un număr rațional q cu proprietatea $q^2 = 2$, dar am găsit valori suficient de apropiate. Vom spune că **putem aproxima** valoarea numărului $\sqrt{2}$.
În fizică, se folosesc, de obicei, aproximările prin lipsă, la sutimi, ale radicalului unui număr rațional.
De exemplu: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$; $\sqrt{5} \approx 2{,}23$.

Pentru orice număr rațional $x \geq 0$, există rădăcina pătrată $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2, \text{ unde } n \geq 0$$